Д. Г. Сокол (Краснодар)

О ДОПУСТИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ПАР ПРОСТРАНСТВ ДЛЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ И УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Изучаются условия допустимости пар пространств $(\widetilde{A}_0^n[a,\infty), \widetilde{A}_0^n[a,\infty))$ $\left((\widetilde{C}_0^n[a,\infty), \widetilde{C}_0^n[a,\infty))\right)$ для операторов

$\widetilde{K}x = \int\limits_a^t K(t,s)x(s)ds$, $\Phi x = \varphi(t, x(t))$ и уравнения $x = \widetilde{K}\Phi x + f$.

Пространство $\widetilde{A}_0^n[a,\infty)$ $\left(\widetilde{C}_0^n[a,\infty)\right)$ состоит из непрерывных и ограниченных на $[a,\infty)$ функций $x(t) : [a,\infty) \to R^n$, имеющих на бесконечности конечный (нулевой) предел по мере Лебега:

$$\exists a = a(x) \in R^n \ \forall\delta > 0 \Rightarrow \lim_{T\to\infty} \mu\{t \geq T : \|x(t) - a\| > \delta\} = 0$$

$$\left(\forall\delta > 0 \Rightarrow \lim_{T\to\infty} \mu\{t \geq T : \|x(t)\| > \delta\} = 0\right).$$

Будем считать, что функция $K(t,s)$ при каждом $t \in [a,\infty)$ суммируема по s на $[a,t]$ и

$$\lim_{h\to+0}\left(\int\limits_a^t |K(t+h,s) - K(t,s)|\, ds + \int\limits_t^{t+h} |K(t+h,s)|\, ds\right) = 0,$$

а функция $\varphi(t,\xi)$ непрерывна при $t \in [a,\infty)$, $\xi \in R^n$. Найдены достаточные, а в ряде случаев необходимые и достаточные условия, обеспечивающие допустимость указанных пар пространств для оператора $\widetilde{K}$, а также необходимые и достаточные условия для их допустимости относительно оператора Φ. Полученные результаты используются при изучении свойств решений нелинейных интегральных уравнений Вольтерра – Гаммерштейна.

Теорема. *Пусть пара пространств* $(\widetilde{A}_0^n[a,\infty), \widetilde{A}_0^n[a,\infty))$ $\left((\widetilde{C}_0^n[a,\infty),\ \widetilde{C}_0^n[a,\infty))\right)$ *допустима для операторов* $\widetilde{K}$ *и* Φ. *Тогда, если существует такая непрерывная на* $[a,\infty)$ *функция* $\omega(t)$, *что*

$$|\varphi(t,\xi_1) - \varphi(t,\xi_2)| \leq \omega(t)|\xi_1 - \xi_2| \quad (\forall t \geq a\ \forall\xi_1,\xi_2 \in R^n)$$

и ядро $|K(t,s)|\,\omega(s)$ *устойчиво, то уравнение*

$$x = \widetilde{K}\Phi x + f$$

при любом свободном члене f *из* $\widetilde{A}_0^n[a,\infty)$ $\left(\widetilde{C}_0^n[a,\infty)\right)$ *имеет единственное решение* $x(t) \in \widetilde{A}_0^n[a,\infty)$ $\left(\widetilde{C}_0^n[a,\infty)\right)$.

А. П. Солдатов (Великий Новгород)

ЗАДАЧА ПУАНКАРЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДАННЫМИ НА ВСЕЙ ГРАНИЦЕ

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$(\mathrm{sgn}\ y)\,u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в смешанной области D комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченной при $y \geq 0$ ($y \leq 0$) ляпуновскими дугами σ (γ) с общими концами в точках $z = k$, $k = 0,1$. Эллиптическую (гиперболическую) части D обозначим D^+ (D^-) и пусть $\theta_k = \theta_k^+$ и θ_k^- означают внутренние углы областей $D^\pm$ в точках $z = k$. Предполагается, что эти углы положительны, а кривая γ некасательна к семейству характеристик $x \pm y = \mathrm{const}$. В частности, $0 < \theta_k \leq \pi$, $0 < \theta_k^- < \pi/4$, $k = 0,1$, а область D^- лежит внутри характеристического треугольника с основанием $J = \{0 < x < 1,\ y = 0\}$.

Под решением уравнения в области D^- класса C^n, $n \geq 0$, понимается функция, представимая формулой Даламбера $u(x,y) = f(x+y) + g(x-y)$ с некоторыми $f, g \in C^n(J)$. Ясно, что это решение принадлежит $C^n\left(\overline{D^-} \setminus \{0,1\}\right)$. При $n \geq 1$ функции f и g могут быть определены через данные Коши $\tau(x) = u(x,0)$ и $\nu(x) = u_y(x,0)$ из соотношений $f + g = \tau$, $f' - g' = \nu$.

Задача Пуанкаре (задача P) заключается в отыскании решения уравнения (1) в классе $C^1(\overline{D} \setminus \{0,1\})$ по краевому условию

$$(a_1 u_x + a_2 u_y + a_0 u)\big|_{\sigma\cup\gamma} = g. \tag{2}$$